

---

---

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

---

---

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ  
НА РОССИЙСКОМ РЫНКЕ ТРУДА

© 2012 г. Е.А. Питухин, В.А. Гуртов, В.А. Голубенко

(Петрозаводск)

Эконометрический анализ динамики численности официально зарегистрированных безработных граждан РФ выявил наличие двух типов циклических изменений численности: долговременного и годового циклов. Проведено моделирование годичной циклической составляющей с использованием гармонических и логистических функций.

**Ключевые слова:** моделирование безработицы, эконометрический анализ, циклические процессы, рынок труда.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Циклические изменения показателей являются характерной особенностью экономических процессов (Акаев, Садовничий, 2009, с. 5). Под циклическостью понимается неравномерное функционирование различных элементов национального хозяйства, смену революционных и эволюционных стадий его развития. Для различных типов экономических процессов характерны как длинные циклы Кондратьева, так и более короткие циклы Жугляра, Кузнеца и Китчина (Полетаев, Савельева, 2009, с. 15).

Спрос и предложение на рынке труда также имеют циклические проявления. Наиболее характерным показателем этого процесса является изменение численности безработных граждан. В настоящее время существуют два показателя, характеризующих безработицу в Российской Федерации. Первый показатель – численность официально зарегистрированных безработных граждан, второй – численность безработных граждан, определяемая по методике МОТ (Труд и занятость, 2009). В работе анализируется динамика численности официально зарегистрированных безработных граждан. Этот показатель выбран в связи с тем, что рассматриваемые данные являются достоверными, поскольку их объективность обеспечивается государственными территориальными органами Федеральной службы по труду и занятости. Кроме того, данный временной ряд обладает достаточной для анализа длиной и частотой дискретизации.

В ходе эконометрического анализа обычно выделяют такие составляющие динамического ряда (Берк, Кэйри, 2005, с. 448), как тренд, сезонная и случайная составляющие. В данной статье эти составляющие будут проанализированы применительно к показателям динамики официально зарегистрированных безработных граждан Российской Федерации.

Несмотря на большое число печатных трудов, связанных с существенными результатами экономико-математического моделирования процессов в экономике России (Петров, Поспелов, 2009, с. 492–506), ни в одной работе не проведен детальный эконометрический анализ динамики официально зарегистрированных безработных граждан РФ и ее составляющих.

Из публикаций, посвященных проблемам моделирования безработицы, можно выделить работы (Коровкин, 2001, с. 228; Shimer, 2005, р. 28), где в качестве объясняющей переменной, влияющей на динамику безработицы, было взято число вакансий.

В работе (Брагин, Осаковский, 2004) проводилась оценка естественного уровня безработицы в России в 1994–2003 гг. в виде разности между численностью экономически активного населения и оптимальной численностью занятых при стабильной инфляции и отсутствии влияния фактора экономического спада (Брагин, Осаковский, 2004, с. 95–104).

Из статей, известных авторам, эконометрическому анализу циклических процессов в российской безработице была посвящена работа (Горбачева, Бреев, Жаромский, 2001), в которой проводились количественные оценки сезонных колебаний численности безработных, определенные по методике МОТ. Для анализа и прогноза динамики численности безработных использовалась лаговая регрессионная модель с использованием сезонных фиктивных переменных (Горбачева, Бреев, Жаромский, 2001, с. 40–46). В данной работе учет цикличности был проведен путем введения в регрессионную модель сезонных индексов. Этот анализ не учитывал ежегодную динамику таких основных влияющих на безработицу факторов, как интенсивность увольнений и трудоустройств, на практике имеющих ежегодно повторяющийся, сезонный характер.

С точки зрения авторов настоящей статьи, природа данных циклических процессов имеет не тригонометрический, а логистический характер.

Выбор логистической функции для описания динамики влияющих факторов основывается на следующих допущениях:

- диффузионный характер распространения воздействия в среде;
- предел насыщения, обусловленный диссипативностью среды;
- ярко выраженный сезонный характер начала воздействия.

## 2. ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЧИСЛЕННОСТИ БЕЗРАБОТНЫХ ГРАЖДАН

**2.1. Анализ данных.** Статистика официально зарегистрированных безработных граждан ведется с частотой в один месяц (Обследование населения, 2010). Это позволяет сформировать продолжительный временной ряд для последующего анализа. На рис. 1 приведена динамика численности официально зарегистрированных безработных граждан Российской Федерации в период 1991–2009 гг., которая в дальнейшем и используется для анализа.

Из представленных на рис. 1 данных видно, что в период наблюдения 1991–2009 гг. возможно выделение двух временных интервалов (1992–2000 гг. и 2001–2008 гг.), характеризующихся различными долговременными составляющими (трендами) динамики численности официально зарегистрированных безработных граждан.

Как правило, параметры трендовой функции подбираются при помощи обычных статистических процедур, в качестве функций используют экспоненциальные, линейные, полиномиальные, логистические и другие зависимости. Метод наименьших квадратов обычно позволяет отсеять неприемлемые и отобрать подходящие функции.

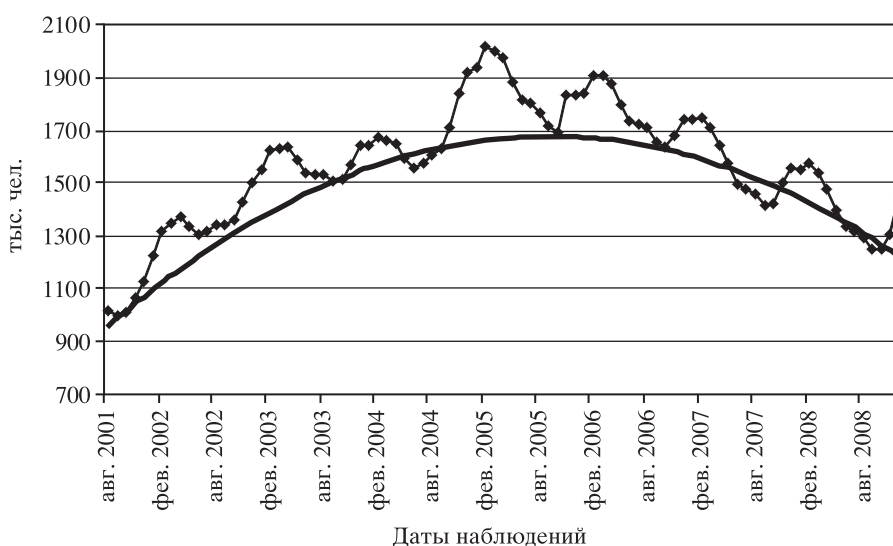
Для выделения долговременной составляющей изменения динамики численности официально зарегистрированных безработных была применена аппроксимация исходных данных квадратичными сплайнами по ежегодным локальным минимумам. На рис. 1 приведены результаты такой аппроксимации. Исследование показало, что тренды на двух рассматриваемых временных интервалах имеют выраженный параболический характер. Освобождение фактических данных от трендовой составляющей позволило получить временной ряд, содержащий циклическую (сезонную) и случайную составляющие в численности официально зарегистрированных безработных граждан.

На рис. 1 этот ряд представлен в нижней части рисунка, форма кривой отражает периодическую структуру рассматриваемой динамики. При этом визуальный анализ исходных данных, представленных в верхней части графика, не позволяет сделать вывод о наличии периодической структуры в динамике численности официально зарегистрированных безработных граждан.

**2.2. Параметры тренда.** Более детальный анализ трендов на обоих временных интервалах (1992–2000 гг. и 2001–2008 гг.) методом наименьших квадратов позволил определить коэффициенты параболической функции, наиболее близкой к функции аппроксимации динамики численности безработных квадратичными сплайнами по ежегодным локальным минимумам. На рис. 2 в качестве примера приведена параболическая функция долговременного тренда на интервале 2001–2008 гг.



**Рис. 1.** Динамика численности официально зарегистрированных безработных граждан РФ (тыс. чел.) и выделенные в ней долговременные (тренды) и циклические (сезонные) составляющие (внизу расположен график разности исходных данных и аппроксимации)



**Рис. 2.** Параболическая функция долговременного тренда и фактические значения численности официально зарегистрированных безработных граждан на интервале 2001–2008 гг.

Нахождение оптимальных значений параметров параболы проводилось по восьми ежегодным локальным минимумам значений численности безработных за рассматриваемый период. Соответствующее уравнение выглядит следующим образом:

$$y_p(t) = at^2 + bt + c, \tag{1}$$

где  $a = -0,3$ ;  $b = 30$  тыс. чел./мес.;  $c = 930$  тыс. чел. Коэффициенты в уравнении (1) на временном интервале 1994–2001 гг. принимают следующие значения:  $a = -0,8$ ,  $b = 60$  тыс. чел./мес.;  $c = 850$  тыс. чел.

Для выделения циклической составляющей динамика численности официально зарегистрированных безработных РФ на интервале 2001–2008 гг. аппроксимируется синусоидальной функцией. Параметры ее уравнения были получены методом наименьших квадратов с учетом касания синусоиды восьми ежегодных локальных минимумов значений численности безработных:  $y_s(t) = A \sin(\omega t + d) + s$ , где  $A = 1392,3$  тыс. чел.,  $\omega = 0,0214 \Rightarrow T = 294$  мес.;  $\varphi = 101$ ;  $s = 273,6$ . Другие значения параметров синусоидальной функции были получены этим же методом без ограничений по локальным минимумам:  $y_s(t) = A \sin(\omega t + d) + s$ , где  $A = 912,6$  тыс. чел.;  $\omega = 0,03 \Rightarrow T = 212$  мес.;

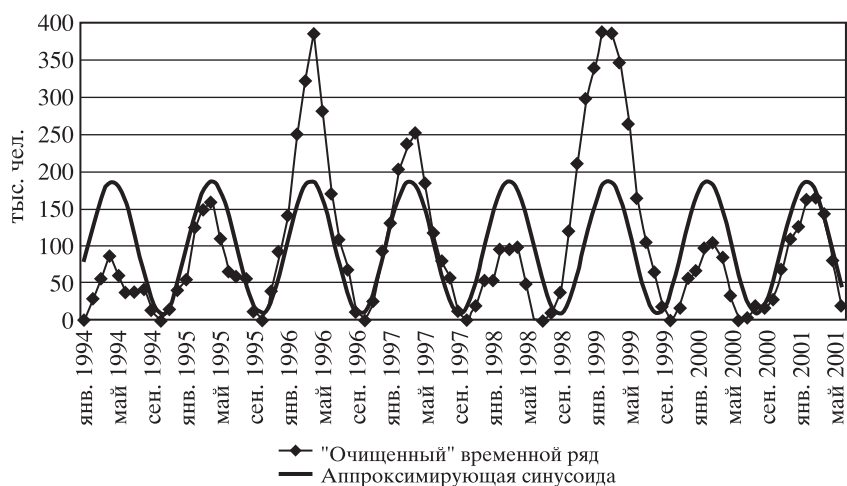


Рис. 3. Фактические значения "очищенного" временного ряда в период 1994–2001 гг. и аппроксимирующая синусоида

$\varphi = 100,64$ ;  $s = 893,5$ . Согласно классификации экономических циклов, оба значения периода попадают под временной промежуток цикла Кузнецца (Полетаев, Савельева, 2009, с. 25).

**2.3. Периодичность сезонной составляющей.** Как было показано на рис. 1, извлечение трендовой составляющей из фактических данных позволяет получить временной ряд, представляющий циклическую (сезонную) и случайную составляющие в численности официально зарегистрированных безработных граждан, которая характеризуется периодической структурой. Для определения периода этого "очищенного" ряда методом наименьших квадратов были найдены параметры синусоиды, описывающие циклическую (сезонную) составляющую.

На рис. 3 приведены фактические значения "очищенного" временного ряда в период 1994–2001 гг. и аппроксимирующая синусоида. По оси абсцисс отложены номера уровней "очищенного" временного ряда с дискретностью в один месяц. Уравнение аппроксимирующей синусоиды имеет вид:

$$y_s(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + s, \quad (2)$$

где  $A = 90$  тыс. чел.;  $\omega = 0,53 \Rightarrow T = 12$  мес.;  $\varphi = -51$ ;  $s = 98$ .

В представленном уравнении синусоиды:  $A$  – амплитуда,  $\varphi$  и  $s$  – параметры, характеризующие начальные условия,  $\omega$  – круговая частота, определяющая период  $T$  синусоиды. В нашем случае это самый главный параметр временного ряда, поскольку его значение в рассматриваемом интервале оказалось равным 12 месяцам.

Аппроксимирующая синусоида в период с августа 2001 по декабрь 2008 г. имела тот же вид с параметрами  $A = 98$  тыс. чел.;  $\omega = 0,53 \Rightarrow T = 12$  мес.;  $\varphi = -22$ ;  $s = 92$ . Значение периода временного ряда в этот период также оказалось равно 12 месяцам.

Таким образом, при сшивании "очищенных" временных рядов циклическая (сезонная) составляющая численности официально зарегистрированных безработных граждан с периодичностью 12 месяцев присутствует на всем интервале наблюдений 1994–2009 гг.

Из рис. 3 видно, что начало ежегодных циклов роста численности официально зарегистрированных безработных граждан приходится на сентябрь–октябрь, достигает максимума на половине цикла в феврале–марте. Начало цикла связано с массовым приходом выпускников различных уровней профессионального образования на рынок труда в начале осени. Уменьшение официально зарегистрированного числа безработных и конец цикла связаны с ростом сезонных работ в весенне-летний период.

**2.4. Анализ остатков временного ряда.** Для определения полноты учета выделенных составляющих был проведен анализ автокорреляционной и частной автокорреляционной функций остатков. Остатки определялись путем вычитания из фактических данных долговременной и цикличе-

ской (сезонной) составляющих. Проверка пригодности модели по условиям Гаусса–Маркова на критерии несмещенности, состоятельности и эффективности показала, что остатки автокоррелированы. Математическое ожидание ошибки оказалось равным 0,06; дисперсия ошибки равна 4000; среднеквадратическое отклонение равно 63. Ошибки были статистически зависимы друг от друга, значение критерия Дарбина–Уотсона составляло 0,23, что подтверждало гипотезу о положительной автокорреляции; ошибка статистически была зависима от времени по критерию Стьюдента.

Следовательно, существует некая дополнительная составляющая  $\varepsilon_t$ , оказывающая влияние на динамику численности официально зарегистрированных безработных граждан, которая не была идентифицирована ранее. Для ее определения использовали один из самых простых случаев авторегрессионной модели скользящего среднего  $ARMA(p, q)$  моделей –  $AR(1)$  – авторегрессионную модель первого порядка, которая записывается в виде

$$\varepsilon_t = a_1 \varepsilon_{t-1} + a_0 + \delta_t. \quad (3)$$

Значения коэффициентов в уравнении (3) были определены с использованием пакета Statistica и равнялись  $a_0 = 1,97$ ,  $a_1 = 0,88$ ,  $\delta_t$  – остатки,  $t$  – номера уровней временного ряда в интервале от 1 до 90.

Проверка остатков  $\delta_t$  по критерию Гаусса–Маркова показала выполнение всех четырех условий, что говорит о пригодности “улучшенной” модели.

Уравнение (3) аналогично динамической модели мобилизации в виде разностного уравнения первого порядка  $M(i+1) = a_0 + a_1 M(i)$ . Решение этого уравнения имеет вид:

$$M(i) = \frac{a_0(1 - a_1^i)}{1 - a_1} + a_1^i M_0, \quad (4)$$

а  $M^* = a_0/(1 - a_1)$  – асимптотическое решение уравнения (4) при больших значениях  $i$ .

Применительно к уравнению (3) переменная  $i$  имеет смысл времени  $t$ , а  $M(i)$  эквивалентно  $\varepsilon_t$ . С учетом полученных ранее значений коэффициентов  $a_0$  и  $a_1$  находим асимптотическое значение  $\varepsilon^*$ , равное  $\varepsilon^* = 17$  тыс. человек.

Следовательно, дополнительная составляющая описывается формулой:

$$\varepsilon_t = \frac{a_0(1 - a_1^t)}{1 - a_1} + a_1^t \varepsilon_0. \quad (5)$$

Несмотря на то что влияние дополнительной составляющей  $\varepsilon_t$  незначительно, с ее выявлением полученная модель удовлетворяет всем четырем условиям Гаусса–Маркова для остатков.

Таким образом, уравнения (1)–(3) и (5) с достаточной точностью описывают на анализируемом временном интервале динамику численности официально зарегистрированных безработных граждан Российской Федерации.

### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОЙ (СЕЗОННОЙ) СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

**3.1. Описание модели.** Пусть  $R(t)$  – ежемесячная численность уволенных граждан РФ (тыс. чел.);  $E(t)$  – численность трудоустроенных граждан РФ (тыс. чел.);  $U(t)$  – численность официально зарегистрированных безработных граждан РФ (тыс. чел.).

Введем следующие допущения модели. Концепция моделирования динамики численности ОЗБ основывается на применении модели переноса вещества и теплоты к потокам движения рабочей силы на рынке труда. Притоком, увеличивающим численность ОЗБ, будем считать уволенных на рынке труда граждан. Оттоком, уменьшающим численность ОЗБ, будем считать трудоустроившихся граждан.

Тогда основное уравнение, связывающее указанные переменные, будет иметь вид

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dR}{dt} - \frac{dE}{dt}, \quad (6)$$

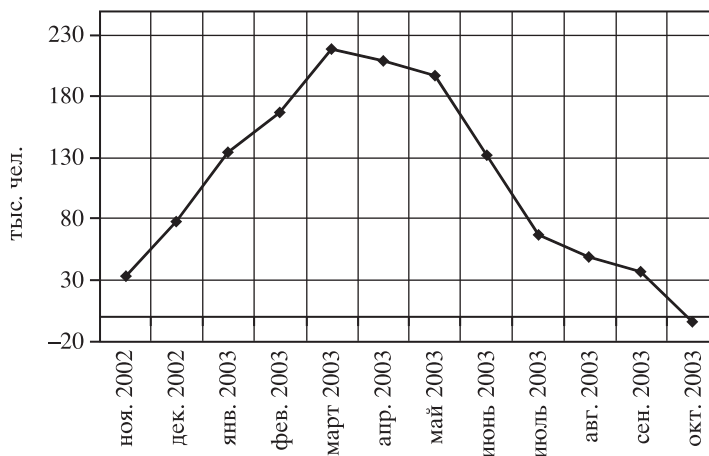


Рис. 4. Ежемесячная динамика изменения численности официально зарегистрированных безработных с ноября 2002 г. по октябрь 2003 г.

которое отражает, что прирост численности безработных равен разности между приростом численности уволенных и приростом численности трудоустроенных граждан на рынке труда.

Динамика многих циклических экономических показателей подчиняется логистическому закону, описываемого уравнением (7) (Grubler, 1996, p. 30), где первый член правой части равенства определяет количество доступных ресурсов, а второй – конкуренцию за них:

$$\frac{dX}{dt} = rX(1 - X/k). \quad (7)$$

Решение (7) в диапазоне годового цикла имеет вид логистической кривой (сигмоида) (8):

$$X(t) = \frac{kX_0 e^{rt}}{k + X_0(e^{rt} - 1)}. \quad (8)$$

Если циклический процесс рассматривается на протяжении многих лет, то график функции (8) повторяется из года в год и будет иметь разрыв в точках начала и конца рассматриваемого временного промежутка.

Применительно к уволенным гражданам логистическое уравнение можно интерпретировать следующим образом: темп увольнения пропорционален произведению числа уволенных на число избыточных работников.

Рассматриваемый временной период годового цикла с ноября по октябрь включительно для переменных  $U(t)$ ,  $R(t)$  и  $E(t)$  делится на два равных этапа. Принимаются следующие допущения.

1. На этапе I с ноября по май (не включительно) не происходит трудоустройство ( $E(t) = 0$ ), увольнения происходят по логистическому закону  $R(t) = k_1 R_0 e^{r_1 t} / (k_1 + R_0(e^{r_1 t} - 1))$ .

2. На этапе II с мая по ноябрь (не включительно) увольнения не происходят ( $R(t) = 0$ ), трудоустройство выпускников системы профессионального образования осуществляется по логистическому закону  $E(t) = k_2 E_0 e^{r_2 t} / (k_2 + E_0(e^{r_2 t} - 1))$ .

На рис. 4 схематично показаны два выше упомянутых этапа одногодичного цикла моделирования численности официально зарегистрированных безработных граждан РФ. Начало цикла – ноябрь 2002 г., конец – ноябрь 2003 г. (цикл  $n$ ).

Согласно принятым допущениям, для этих исходных данных строится логистическая кривая изменения численности уволенных граждан  $R(t)$  (рис. 5). Параметры идентификации равны  $k_1 = 210$ ;  $R_0 = 10,1$ ;  $r_1 = 1,2$ . Модельная функция  $R(t)$  удовлетворяет допущениям 1 и 2 для любого из  $n$  циклов.

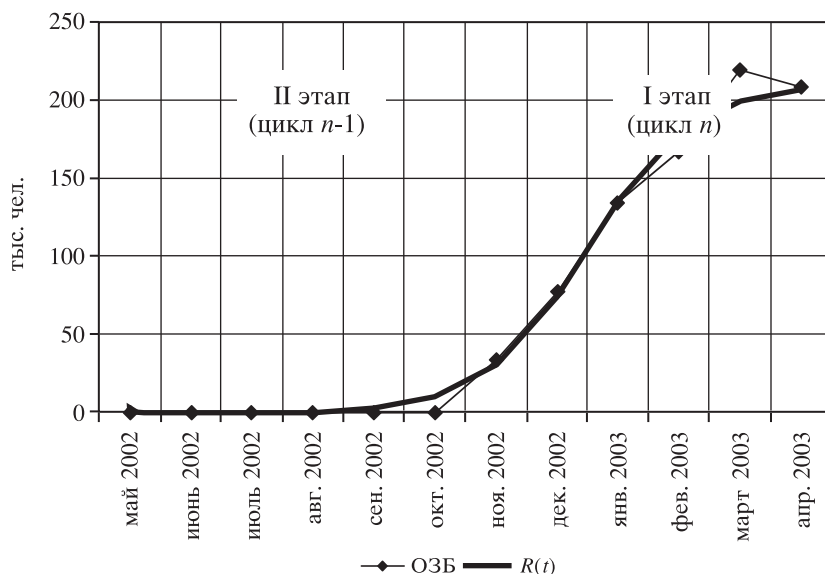


Рис. 5. Моделирование процессов увольнения, отражающего рост безработицы в связи с увольнением

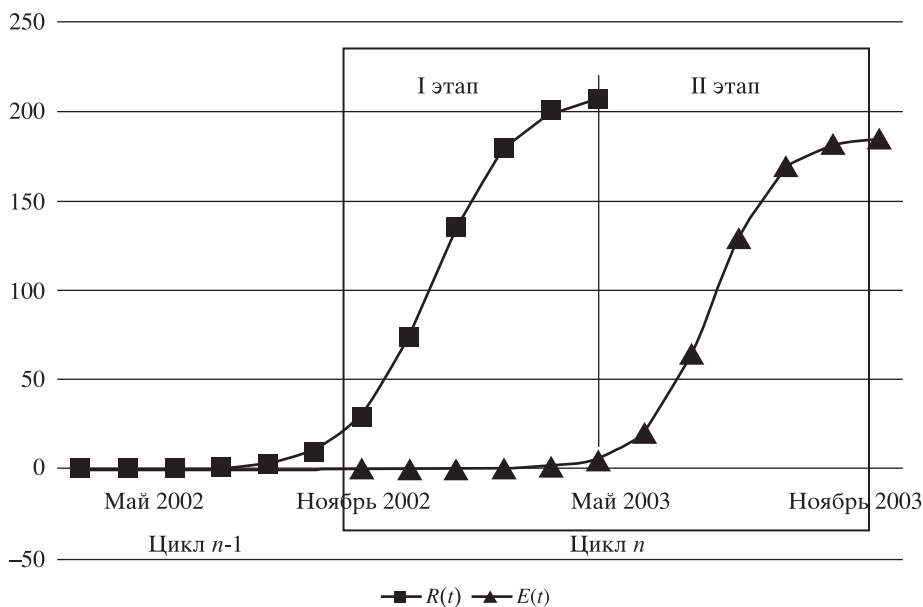


Рис. 6. Взаимосвязь циклических процессов увольнения и трудоустройства

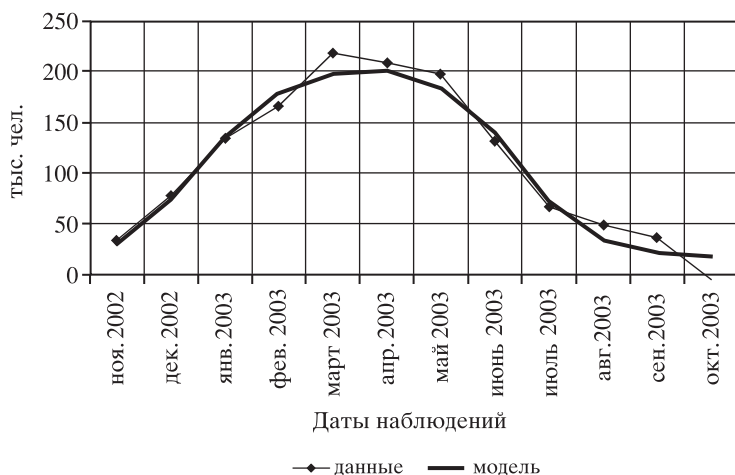
Кривая изменения численности трудоустроенных граждан  $E(t)$  выглядит аналогично кривой  $R(t)$ , но сдвинута при этом вперед на 6 месяцев в рамках единой временной оси. Это проиллюстрировано на рис. 6. Параметры идентификации кривой  $E(t)$  по исходным данным  $k_2 = 185,5$ ;  $E_0 = 0,001$ ;  $r_2 = 1,5$ . Интегрируя уравнение (6), получим одно из его частных решений:

$$U(t) = U_0 + R(t) - E(t), \tag{9}$$

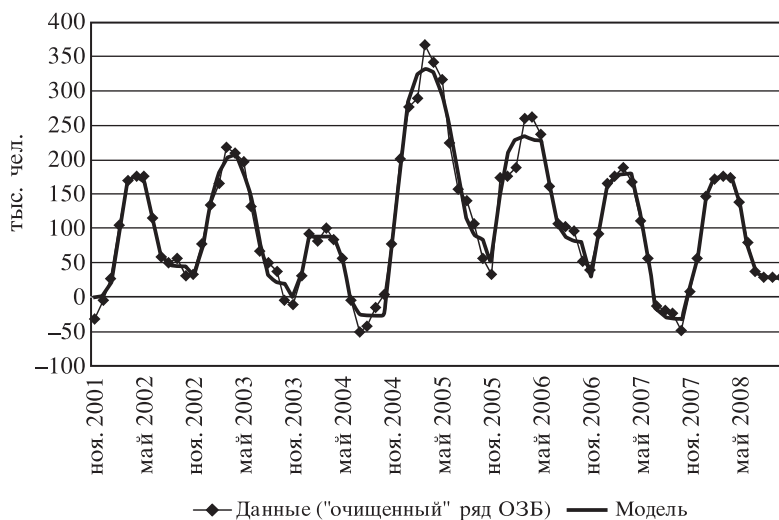
где  $U_0$  – начальный уровень безработицы.

Уравнение (9), с учетом допущения, что процесс трудоустройства  $E(t)$  запаздывает на  $\tau = 6$  месяцев относительно  $R(t)$ , записывается в пределах целого цикла в виде двух отдельных уравнений для первого и второго этапа

$$\begin{cases} U^I(t) = U_0^I + R(t) - E(t - \tau) \\ U^{II}(t) = U_0^{II} + R(t - T) - E(t - \tau). \end{cases} \tag{10}$$



**Рис. 7.** Результат моделирования численности официально зарегистрированных безработных граждан РФ на основе моделей изменения численности уволенных и трудоустроенных



**Рис. 8.** Циклическая составляющая численности официально зарегистрированных безработных граждан (точки) и ее моделирование логистическими кривыми Ферхюльста (сплошная линия).

Поскольку функции  $R(t)$  и  $E(t)$  имеют разрывы первого рода, их следует отдельно интегрировать на участках, не содержащих разрывов, передавая конечное значение на этапе I в качестве начального значения на этапе II. В формуле (10), на этапе II, функция  $R(t)$  сдвигается на 12 месяцев относительно предыдущей функции  $R(t)$  и идентифицируется по новым исходным данным.

Отметим, что формула (10) справедлива в пределах рассмотрения одного цикла. Переходя к общему случаю, для реализации цикличности функции  $R(t)$  и  $E(t)$  могут быть записаны с учетом периодического аргумента:  $R(t) = R(t + nT)$ ,  $E(t) = E(t + nT)$ ,  $t \in [0, T)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Итоговым результатом оценки численности официально зарегистрированных безработных  $U(t)$  на основе моделирования процессов увольнений  $R(t)$  и трудоустройства  $E(t)$  логистическими кривыми будет система (10), график которого приведен на рис. 7. Из графиков видно, что модель (10) описывает реальные процессы изменения динамики численности официально зарегистрированных безработных граждан РФ с приемлемым качеством. Параметры, используемые при расчете, были приведены выше.



Проведя аналогичное моделирование для других временных промежутков длиной цикла один год в диапазоне 2001–2008 гг., мы получили результат, приведенный на рис. 8. Значения параметров логистических кривых, используемые при расчете, индивидуально подбирались для каждого года. Средняя ошибка аппроксимации составляет 11%.

Отметим, что моделирование официально зарегистрированных безработных граждан логистическими кривыми (рис. 8) по сравнению с моделированием гармонической функцией (рис. 3) более предпочтительно, поскольку базируется на экономической интерпретации процессов, происходящих на рынке труда.

#### 4. ВЫВОДЫ

1. Выявлены две основные составляющие динамики численности официально зарегистрированных безработных граждан Российской Федерации в период 1991–2009 гг.: долговременная и сезонная составляющие.

2. Долговременная составляющая (тренд) имеет два периода: 1992–2000 гг. (период 1) и 2001–2009 гг. (период 2) – и описывается в каждый из этих периодов квадратичной функцией с положительным значением коэффициента  $b$  и отрицательным значением коэффициента  $a$ :  $y_{lr}(t) = at^2 + bt$ . Значение  $b_1 = 60$  тыс. чел./мес., значение  $a_1 = -0,8$  тыс. чел./мес.<sup>2</sup>;  $b_2 = 30$  тыс. чел./мес., значение  $a_2 = -0,3$  тыс. чел./мес.<sup>2</sup>.

3. Период циклической (сезонной) составляющей равнялся 12 месяцам со средней ошибкой аппроксимации 3%.

4. Проведено моделирование годовой циклической составляющей численности официально зарегистрированных безработных граждан РФ с использованием гармонических и логистических функций.

5. Получено, что численность официально зарегистрированных безработных граждан меняется циклически вследствие наложения друг на друга двух циклических сдвинутых между собой по времени логистических процессов увольнения и трудоустройства граждан РФ, доминирующее влияние на которые оказывают выпускники системы профессионального образования.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Акаев А.А., Садовничий В.А.** (2009): О новой методологии долгосрочного циклического прогнозирования динамики развития мировой и российской экономики. В кн.: *“Прогноз и моделирование кризисов и мировой динамики”* / Ред. Акаев А.А., Коротаев А.В., Малинецкий Г.Г. М.: ЛКИ/URSS.
- Берк К., Кэйри П.** (2005): Анализ данных с помощью Microsoft Excel. М.: Вильямс.
- Брагин В.А., Осаковский В.В.** (2004): Оценка естественного уровня безработицы в России в 1994–2003 гг.: эмпирический анализ // *Вопросы экономики*. № 3.
- Горбачева Т.Л., Бреев Б.Д., Жаромский В.С.** (2001): Оценка сезонных колебаний и прогноз численности безработных // *Вопросы статистики*. № 3.
- Коровкин А.Г.** (2001): Динамика занятости и рынка труда: вопросы макроэкономического анализа и прогнозирования. М.: МАКС Пресс.
- Обследование населения (2010): Обследование населения по проблемам занятости (1991–2010). Стат. сб. [Электронный ресурс] Росстат. Официальный сайт Федеральной службы по труду и занятости. Режим доступа: <http://www.rostrud.ru>, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: декабрь 2011 г.).
- Петров А.А., Поспелов И.Г.** (2009): Математические модели экономики России // *Вестник Российской академии наук*. Т. 79. № 6.

- Полетаев А.В., Савельева И.М.** (2009): “Циклы Кондратьева” в исторической ретроспективе. М.: Юридический дом “Юстицинформ”.
- Труд и занятость (2009): Труд и занятость в России. Стат. сб. М.: Росстат.
- Grubler A.** (1996): Time for a Change: On the Pattern of Diffusion of Innovation // *Daedalus*. № 1.
- Shimer R.** (2005): The Cyclical Behavior of Equilibrium Unemployment and Vacancies // *The American Econ. Rev.* Vol. 95. № 1.

Поступила в редакцию  
04.08.2010 г.

## **Modeling the Cyclic Processes in the Russian Labor Market**

**Ye.A. Pitukhin, Gurtov V.A., Golubenko V.A.**

Econometric analysis of dynamics of the officially registered unemployed citizens of the Russian Federation has revealed the presence of two types of cyclic changes: long-term and yearly cycles. Proposed the modeling of a year cyclic component with the use of harmonious and logistical functions.

**Keywords:** unemployment modeling, econometric analysis, cyclic processes, labor market.